4. TR Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{20x}{(x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$. Ihr Schaubild sei K. A

a) Zeichnen Sie K mithilfe des TR.

b) K schließt mit den Koordinatenachsen und der Geraden $g: x = 10$ eine Fläche ein. Berechnen Sie ihren Inhalt mithilfe des TR auf drei Dezimalen genau.

Nun beschreibe f die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten (x in Stunden seit der Verabreichung des Medikaments), f(x) in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

c) Wie groß ist die mittlere Konzentration zwischen 2 und 6 Stunden nach der Einnahme? Geben Sie das Ergebnis auf Zehntel gerundet an.

d) Wann ist die Konzentration am höchsten? Wie groß ist die maximale Konzentration?

e) Wann ist die Konzentration nur halb so groß wie die maximale? Runden Sie auf zwei Dezimalen.

f) Wann nimmt die Konzentration am schnellsten ab?

4. Problemanalyse L

a) Der TR liefert eine Wertetabelle zu f.

b) Flächeninhalt mit Integral berechnen

c) Mittelwert der Funktionswerte

d) Bestimmung von Extremstelle und Maximum einer Funktion

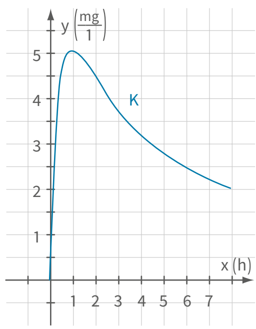
e) Stellen mit speziellem Funktionswert bestimmen

f) Berechnung einer Wendestelle

Lösung

a) siehe Abbildung rechts.

Schaubild



b) **Flächeninhalt**

Mit dem TR ergibt sich $A = \int_0^{10} f(x)\,dx \approx 29{,}8$.

Der Flächeninhalt beträgt etwa 29,8 FE.

c) **Mittlere Konzentration**

$m = \frac{1}{6-2} \int_2^6 f(x)\,dx \approx 3{,}3$.

Zwischen 2 und 6 Stunden nach Einnahme besteht eine mittlere Konzentration von etwa $3{,}3\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

d) **Maximale Konzentration**

Mit der Quotienten- und der Kettenregel findet man

$f'(x) = 20 \cdot \frac{1 \cdot (x+1)^2 - x \cdot 2 \cdot (x+1)}{(x+1)^4} = 20 \cdot \frac{1-x}{(x+1)^3}$.

Man sieht sofort, dass $f'(x)$ nur für $x = 1$ den Wert 0 annimmt.

Außerdem wechselt f' dort das Vorzeichen von + nach –.

Also ist die Konzentration nach einer Stunde am höchsten.

Wegen $f(1) = 5$ beträgt die maximale Konzentration $5\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

e) **Halbe maximale Konzentration**

Der Ansatz $f(x) = 2{,}5$ führt auf die Gleichung $\frac{20x}{(x+1)^2} = 2{,}5$.

Bei der Betrachtung von K erkennt man, dass es zwei Lösungen gibt.

Mit dem TR findet man $x_1 \approx 0{,}17$ und $x_2 \approx 5{,}83$.

Nach etwa 0,17 und 5,83 Stunden ist die Konzentration halb so hoch wie die maximale.

f) **Schnellste Konzentrationsabnahme**

An $f''(x) = \frac{40(x-2)}{(x+1)^4}$ erkennt man, dass 2 die einzige Wendestelle von f ist.

Folglich nimmt die Konzentration nach 2 Stunden am schnellsten ab.

A

5. TR Nach dem Tod eines Organismus zerfällt die ursprünglich vorhandene Menge C^{14} mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren. Es sei eine Ausgangsmenge von 250 mg angenommen.

a) Bestimmen Sie eine Funktion f mit $f(t) = a \cdot e^{kt}$, $t \in \mathbb{R}_0^+$ $\left(a \in \mathbb{R}^+,\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$, die den Zerfallsprozess beschreibt. Skizzieren Sie ihr Schaubild K für $0 \le t \le 20\,000$. Wählen Sie sinnvolle Längeneinheiten auf den Koordinatenachsen.

b) Welche Menge C^{14} ist nach 2000 Jahren noch vorhanden?

Wie viel Prozent der ursprünglich vorhandenen C^{14}-Menge ist nach 20 000 Jahren zerfallen?

Berechnen Sie das Alter einer Probe, bei der nur noch 60 mg C^{14} nachgewiesen werden.

In welchem Jahrtausend nach Zerfallsbeginn nimmt der C^{14}-Anteil erstmals um weniger als 5 mg ab?

c) Bestimmen Sie für den Zeitraum von 6000 bis 12 000 Jahre nach Zerfallsbeginn einen mittleren Wert für die bereits zerfallene C^{14}-Menge.

d) Zeigen Sie: Die Funktionen f mit $f(t) = a \cdot e^{-t}$ erfüllen für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ die Differentialgleichung $f'(t) = k \cdot f(t)$. Welche Wachstumsform wird dadurch beschrieben?

L

5. Problemanalyse

a) Bestimmung einer Exponentialfunktion,
Skizze des Schaubilds mithilfe eines TR

b) Funktionsbegriff, Prozentrechnung, lösen einer Exponentialgleichung

c) Mittelwert der Funktionswerte, Integral

d) Ableitungsregeln, Differentialgleichung, Wachstumsformen

Lösung

a) **Funktionsbestimmung**

$f(t) = a \cdot e^{kt}$, t in Jahren,

$f(t)$ in mg

$f(0) = 250 \iff a = 250$

$f(5730) = \frac{1}{2}a$

$\iff a \cdot e^{5730k} = \frac{1}{2}a$

$\iff e^{5730k} = \frac{1}{2}$

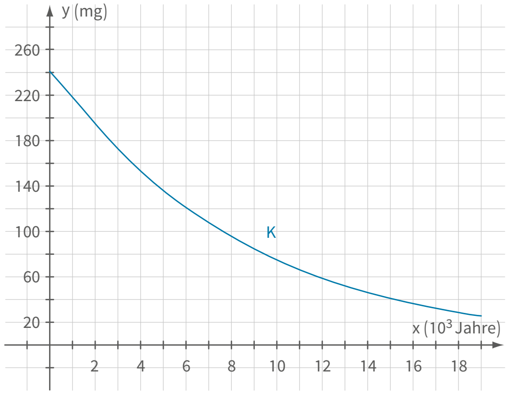
$\iff 5730k = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\iff k = -\frac{\ln 2}{5730} \approx -1{,}21 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{Jahre}}$

Damit ist f mit

$f(t) = 250 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$

Skizze



die gesuchte Funktion. Wegen $e^{\ln 2} = 2$ kann der Funktionsterm auch umgeformt werden zu $f(t) = 250 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$.

b) **C^{14}-Menge nach 2000 Jahren**

$f(2000) = 250 \cdot 2^{-\frac{2000}{5730}} \approx 196{,}3$

Nach 2000 Jahren sind noch 196,3 mg C^{14} vorhanden.

Zerfallener C^{14}-Anteil nach 20 000 Jahren

$f(20\,000) \approx 22{,}2$

$250 - 22{,}2 = 227{,}8$

$p \approx \frac{227{,}8}{250} \cdot 100 \approx 91{,}1$

Nach 20 000 Jahren sind etwa 91 % der ursprünglich vorhandenen C^{14}-Menge zerfallen.

Alter der Probe

$$f(t) = 60 \iff 250 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}} = 60$$

$$\iff 2^{-\frac{t}{5730}} = \frac{6}{25}$$

$$\iff \ln\left(2^{-\frac{t}{5730}}\right) = \ln\frac{6}{25}$$

$$\iff -\frac{t}{5730}\ln 2 = \ln\frac{6}{25}$$

$$\iff t = -5730\,\frac{\ln\frac{6}{25}}{\ln 2} \approx 11\,797$$

Die Probe ist also knapp 12 000 Jahre alt.

Jahrtausend

$$f(t) - f(t+1000) = 5 \iff 250 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}} - 250 \cdot 2^{-\frac{t+1000}{5730}} = 5 \iff 2^{-\frac{t}{5730}} - 2^{-\frac{t+1000}{5730}} = \frac{1}{50}$$

Der TR liefert $t \approx 14\,383$, wobei der Startwert 12 000 anhand des Schaubilds grob geschätzt wurde. Da im Zeitraum $[14\,383;\, 15\,383]$ die Abnahme nach obiger Rechnung genau 5 mg beträgt, muss die C^{14}-Menge erstmals im 16. Jahrtausend nach Zerfallsbeginn um weniger als 5 mg abnehmen.